Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа рабочего поселка Шемышейка имени Героя Советского Союза Александра Тимофеевича Бодряшова

Проект
по теме «Тригонометрические уравнения в заданиях ЕГЭ»

Автор работы:
Топорин Богдан, 11А класс

Руководитель:
Тарасов Евгений Александрович,
учитель математики и физики

р.п. Шемышейка, 2021 г.

Оглавление

Введение………………………………………………………...…..3
Глава 1 Тригонометрические уравнения…………………………………4
1.1 История тригонометрии………………………………………………4
1.2 Основные виды тригонометрических уравнений и способы их решения……………………………………………………………………5
1.2.1 Простейшие тригонометрические уравнения………………5
1.2.2 Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим……………………………………………………5
1.2.3 Однородные тригонометрические уравнения………………6
1.2.4 Метод введения вспомогательного угла……………………7
1.2.5 Метод разложения на множители…………………………...8
Глава 2 Тригонометрические уравнения, предлагавшиеся на ЕГЭ разных лет……………………………………………………………10
Заключение……………………………………………………………..14
Список литературы……………………………………………………15

Введение

Одним из важнейших этапов жизни обучающихся одиннадцатого класса является сдача единого государственного экзамена. Хорошие баллы, полученные на экзамене, позволят выпускнику поступить в высшее учебное заведение. Но чтобы эти баллы набрать, необходимо много готовиться, порой даже выходя за рамки школьной программы.

В конце следующего учебного года мне, как выпускнику одиннадцатого класса, предстоит пройти процедуру сдачи ЕГЭ по нескольким предметам. Одним из них является математика. Это сложный, но очень интересный, на мой взгляд, предмет. Сдавать я буду экзамен по профильной математике, поэтому подготовку начал заранее.

Одним из заданий, которое предлагается на этом экзамене, является решение тригонометрического уравнения. Сама по себе тригонометрия является достаточно сложным разделом в школьном курсе математики. Для того чтобы успешно справиться с заданиями, включающими тригонометрические уравнения, необходимо помнить большое количество формул, методов решения и способов отбора корней таких уравнений.

Перед собой я поставил цель систематизировать, а также расширить знания, умения и навыки решения тригонометрических уравнений. Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

- изучить основные виды тригонометрических уравнений и способы их решения;
- проанализировать задания, связанные с решением тригонометрических уравнений, в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по профильной математике.

Также я задал себе вопрос: «Достаточно ли будет знаний, полученных на уроках математики в школе, для успешного решения тригонометрического уравнения на экзамене?» Чтобы ответить на него, необходимо овладеть различными способами решения тригонометрических уравнений, а также изучить уравнения, которые предлагались на едином экзамене в разные годы. Этому и будет посвящена моя работа.

Глава 1. Тригонометрические уравнения

1.1 История тригонометрии

Слово «тригонометрия» образовано от греческих слов «тригонон» – треугольник и «метрео» – измеряю. Дословно его можно перевести как «измерение треугольников». Впервые термин был введён в 1595 году немецким богословом-математиком Варфоломеем Питиском, известным в то время автором учебника тригонометрии и тригонометрических таблиц. Возникновение тригонометрии связано с развитием астрономии и географии. Эти древнейшие науки зародились и развивались во многих странах, например, Вавилоне, Египте, Китае, Индии. В результате произведённых астрономических наблюдений возникла необходимость определения положения светил, вычисления расстояний и углов. Так как некоторые расстояния нельзя было измерить непосредственно, то учёные стали разрабатывать приёмы нахождения взаимосвязей между сторонами и углами треугольника, у которого две вершины расположены на Земле, а третью представляет планета или звезда. Такие соотношения можно вывести, изучая различные треугольники и их свойства. Вот почему астрономические вычисления привели к решению треугольника.

Зачатки тригонометрии обнаружены в сохранившихся документах Древнего Вавилона, где астрономия достигла значительного развития. Вавилонские учёные составили одну из первых карт звёздного неба. Они умели предсказывать лунные и солнечные затмения.

Значительного развития тригонометрия как часть астрономии достигла в Древней Греции. Древнегреческие учёные впервые поставили перед собой задачу решения прямоугольного треугольника. Они составляли таблицы длин хорд, соответствующих различным центральным углам круга постоянного радиуса. Первые такие таблицы были составлены астрономом-математиком Гиппархом из Никеи (II в. до н. э.).

Элементы прямолинейной и сферической тригонометрии содержатся в «Альмагесте», знаменитом сочинении древнегреческого астронома Клавдия Птолемея (II в.). Представленная автором таблица хорд была составлена в шестидесятеричной системе счисления через полградуса от 0 до 180º и играла большую роль для учёных того времени.

В Индии значительное развитие получила техника тригонометрических вычислений, применявшихся для решения прямоугольных треугольников. Индийские учёные положили начало учению о тригонометрических величинах, которые они рассматривали в пределах первой четверти круга. Синус и косинус встречаются в сочинениях индийских астрономов уже в IV-V вв. А в IX-X вв. учёные стран ислама ввели новые тригонометрические величины: тангенс и котангенс, секанс и косеканс.

Отделение тригонометрии от астрономии в самостоятельную дисциплину произошло в XIII в. благодаря уроженцу иранского города Тус Насир ад-Дину (1201–1274). Его труд «Китаб аш-шакл ал-кита» (1260 г.) является первым в мире сочинением, специально посвящённым тригонометрии. В нём достаточно полно изложено то, что было установлено раньше, а также исследования самого автора.

В Европе большую роль в развитии тригонометрии как самостоятельной науки сыграли такие учёные, как Региомонтан, Н. Коперник, Ф. Виет, И. Кеплер. Современный вид тригонометрия получила в трудах Л. Эйлера. Он разработал её как науку о тригонометрических функциях, рассматриваемых как отношения соответствующих тригонометрических линий к радиусу. Эйлер установил несколько неизвестных до него формул и ввёл единообразные знаки.

1.2 Основные виды тригонометрических уравнений и способы их решения

1.2.1 Простейшие тригонометрические уравнения

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком тригонометрических функций. Решение различных типов тригонометрических уравнений большей частью основано на сведении их к некоторым простейшим уравнениям. Представим эти уравнения и их решения в виде таблицы.

Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$
$tg\, x = a$	$x = arctg\, a + \pi n,\ n \in Z$
$ctg\, x = a$	$x = arcctg\, a + \pi n,\ n \in Z$

В ряде случаев использование общей формулы серии решений не всегда удобно при отборе корней. При этом целесообразнее не объединять серии решений тригонометрических уравнений, а представлять их совокупностью (см. таблицу ниже):

Вид уравнения	Общая формула решений
$\sin x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \left[\begin{array}{l} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$
$\cos x = a,\ \lvert a\rvert \le 1$	$x = \left[\begin{array}{l} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$
$tg\, x = a$	$x = \left[\begin{array}{l} arctg\, a + 2\pi n, \\ \pi + arctg\, a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$
$ctg\, x = a$	$x = \left[\begin{array}{l} arcctg\, a + 2\pi n, \\ \pi + arcctg\, a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$

Примерами тригонометрических уравнений, сводящихся к рассмотренным выше простейшим , могут служить следующие уравнения: 1) $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$; 2) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; 3) $3\sin x - 4 = 0$; 4) $3tg\, x + 1 = 0$; 5) $3ctg\, x + 2 = 0$; 6) $2\sin 5x + 1 = 0$.

1.2.2 Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим

Во многих случаях решение тригонометрических уравнений сводится к решению основных элементарных уравнений после выполнения ряда алгебраических действий. Одним из таких действий является введение новой переменной. Рассмотрим одно из таких уравнений.

Пример. Решить уравнение $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$.

Решение. Введём новую переменную. Пусть $\sin x = t,\ -1 \le t \le 1$. Получаем квадратное уравнение относительно новой переменной t

$$2t^2 + 5t - 3 = 0 .$$

Решив его, получим два корня $t_1 = -3$ *и* $t_2 = \frac{1}{2}$. Число –3 не удовлетворяет условию для переменной *t*. Возвращаясь к замене, получаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$. Решение этого уравнения имеет вид $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. Оно же будет являться решением исходного тригонометрического уравнения.

Подобным образом будут решаться тригонометрические уравнения, содержащие переменную только под знаком одной тригонометрической функции, например: $a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$

$tg^4 x + a\,tg^2 x + b = 0$

$a\cos^3 x - b\cos x = 0$ *и т. д.*

Однако в большинстве случаев приходится исходное уравнение ещё преобразовывать так, чтобы оно приобрело нужный вид. Рассмотрим следующее уравнение.

Пример. $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

Решение. В данном уравнении переменная содержится под знаком двух тригонометрических функций. Поэтому, используя основное тригонометрическое тождество, приведём сначала уравнение к виду $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Далее вводим новую переменную: $\cos x = t,\ -1 \le t \le 1$. Получаем квадратное уравнение относительно t $2t^2 - t - 1 = 0$, его корнями являются числа 1 и $-\frac{1}{2}$. Подставляя их вместо *t*, получаем два простейших тригонометрических уравнения: $\cos x = 1$, решения которого имеют вид $x = 2\pi n,\ n \in Z$; $\cos x = -\frac{1}{2}$, его решения имеют вид $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. В ответ идут обе серии корней.

Приведу ещё несколько уравнений, решаемых подобным образом:

$$4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0;$$

$$12\cos^2 x + \sin x - 11 = 0;$$

$$6\cos^2 x + 5\sin x - 2 = 0.$$

1.2.3 Однородные тригонометрические уравнения

Однородными тригонометрическими уравнениями называются уравнения вида $a_n \sin^n x + a_{n-1}\sin^{n-1} x\cos x + ... + a_1 \sin x\cos^{n-1} x + a_0 \cos^n x = 0$, в которых сумма показателей степеней у $\sin x$ и $\cos x$ во всех членах уравнения одинакова. Например, $a\sin x + b\cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени; $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени; $a\sin^3 x + b\sin^2 x\cos x + c\sin x\cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ – однородное уравнение третьей степени.

Для того чтобы решить однородное уравнение, необходимо разделить обе части на $\cos^n x$ или $\sin^n x$, где *n* – степень уравнения. При этом исходное уравнение сводится к алгебраическому уравнению относительно $t = tg\,x$ или $t = ctg\,x$.

Следует отметить, что деление может привести к потере корней. Пусть в уравнении $a\sin x + b\cos x = 0$ $à \ne 0$. Тогда значения *x*, при которых $\cos x = 0$, не удовлетворяют данному уравнению, так как если $\cos x = 0$, то $\sin x \ne 0$ $(\sin^2 x + \cos^2 x = 1)$. Поэтому в случае $à \ne 0$, разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим равносильное ему уравнение $a\,tg\,x + b = 0$. Аналогичные рассуждения можно провести для однородных уравнений второй, третьей и более высоких степеней. Таким образом, при делении обеих частей уравнения на $\cos x$ или $\sin x$ потери корней не произойдёт.

Пример. Решим уравнение $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x$, получим уравнение $tg\,x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Его решение имеет вид $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

Уравнение $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$ при $d \neq 0$ не является однородным, но его можно привести к однородному уравнению вида $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$, заменив число d тождественно равным ему выражением $d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$. Получим

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$(a-d)\sin^2 x + b\sin x\cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

Последнее уравнение является однородным второй степени.

Пример. Решим уравнение $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2$.

Решение. Запишем уравнение так:

$$2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 8\cos^2 x = -2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

После этого будем иметь $4\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0$.

Разделим обе части последнего уравнения на $\cos^2 x \neq 0$. Получим уравнение

$$4tg^2 x - 5tg\, x - 6 = 0,$$

откуда $tg\, x_1 = 2$ и $tg\, x_2 = -\frac{3}{4}$. Решив последние уравнения, получим решения первоначального уравнения: $x_1 = arctg\, 2 + \pi n,\ n \in Z$ и $x_1 = -arctg\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

1.2.4 Метод введения вспомогательного угла

Рассмотрим уравнение $a\sin x + b\cos x + c = 0,\ где\ a^2 + b^2 > 0$. Будем считать, что $a \neq 0\ è\ b \neq 0$ (в противном случае получаем простейшие тригонометрические уравнения вида $\sin x = -\frac{c}{a}\ èëè\ \cos x = -\frac{c}{b}$). Если $c = 0$, то данное уравнение является однородным и при $a \neq 0$ равносильно уравнению $a\,tg\, x + b = 0$.

Так как $à^2 + b^2 > 0$, то, разделив обе части уравнения $a\sin x + b\cos x + ñ = 0$ на $\sqrt{à^2 + b^2}$, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (*)$$

Заметим, что $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Следовательно точка с координатами $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ лежит на единичной окружности. Поэтому существует такой угол φ, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$. (**)

Тогда уравнение (*) можно переписать в виде

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (***)$$

Уравнение (***), а вместе с ним и уравнение $a\sin x + b\cos x + ñ = 0$ имеет решение в том и только в том случае, если $\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1,\ èëè\ c^2 \leq a^2 + b^2$. Если это условие выполнено, то уравнение $a\sin x + b\cos x + ñ = 0$ имеет следующие решения $x = -\varphi + (-1)^n \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n,\ n \in Z$, где φ определяется формулами (**).

Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение $a\sin x + b\cos x + \tilde{n} = 0$ решений не имеет.

Пример. Решим уравнение $2\sin x - 2\cos x = 1 - \sqrt{3}$.

Решение. В данном уравнении $a = 2,\ b = 2,\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$. Перепишем его в виде $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. (1)

Положим $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi$ è $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi$. Тогда уравнение (1) примет вид $\sin(x+\varphi) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (2). Последнее уравнение имеет решение, поскольку $-1 < \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} < 0$. В качестве φ можно взять $-\frac{\pi}{4}$. Уравнение (2) имеет решение $x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi n,\ n \in Z$, откуда получим общее решение заданного уравнения в виде $x = (-1)^n \arcsin\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \pi n + \frac{\pi}{4},\ n \in Z$

.

1.2.5. Метод разложения на множители

Один из основных подходов к решению тригонометрических уравнений состоит в их последовательном упрощении с целью сведения к одному или нескольким простейшим. Для упрощения используются тригонометрические формулы. Универсального ответа на вопрос, какие формулы следует применить в том или ином случае, нет. Но есть ряд приёмов, которые полезно иметь в виду при поиске решения.

Если в уравнении, приведённом к виду $f(x) = 0$, его левая часть $f(x)$ разлагается на множители, то следует приравнять каждый из этих множителей к нулю. Получится несколько отдельных уравнений; корни каждого из них будут корнями основного уравнения, если только они входят в ОДЗ каждого из множителей левой части уравнения.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 7x - \cos 4x = \sin x$.

Решение. Запишем уравнение следующим образом:

$$(\sin 7x - \sin x) - \cos 4x = 0.$$

Применив формулу разности синусов, получим

$$2\sin 3x\cos 4x - \cos 4x = 0,$$

откуда

$$\cos 4x\,(2\sin 3x - 1) = 0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения:

а) $\cos 4x = 0$ и б) $2\sin 3x - 1 = 0$.

Первое уравнение имеет корни $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$. Второе уравнение имеет корни $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3},\ k \in Z$. Все найденные значения x_1 и x_2 являются корнями заданного уравнения.

Пример 2. Решить уравнение $6\sin x\cos x + \sin 2x \sin\frac{2}{x} = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса двойного угла

$$3\sin 2x + \sin 2x\sin\frac{2}{x} = 0,$$

$$\sin 2x\left(3+\sin\frac{2}{x}\right)=0.$$

Нетрудно заметить, что $3+\sin\frac{2}{x}>0$. Поэтому последнее уравнение равносильно системе $\begin{cases}\sin 2x=0\\ x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi n}{2},\ n\in Z,\ n\neq 0$. Полученные корни и являются корнями заданного уравнения.

Конечно, всё многообразие тригонометрических уравнений и способов их решения не исчерпывается вышеперечисленными. Но хватит ли такого запаса знаний для успешного решения тригонометрического уравнения на едином экзамене? Ответ будет дан в следующей главе.

Глава 2. Тригонометрические уравнения, предлагавшиеся на ЕГЭ разных лет

Единый государственный экзамен впервые был проведён в 2001 году в нескольких субъектах Российской Федерации. В 2008 году его сдавали уже во всех регионах страны. В настоящее время ЕГЭ служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным экзаменом в вузы.

За прошедшие 20 лет в контрольно-измерительных материалах по математике произошли существенные изменения. Первоначально задания делились на три части: А, В и С. Часть А содержала тестовые задания с выбором ответа из предложенных вариантов. На каждое задание части В нужно было дать краткий ответ. Задания части С требовали записи развёрнутого решения.

В 2010 году из КИМов была исключена часть А. А в 2015 году экзамен по математике был разделён на базовый и профильный уровни. Но, какие бы изменения ни вносились в единый экзамен по математике, тригонометрические уравнения всегда присутствовали в контрольно-измерительных материалах.

Для того чтобы узнать, какие тригонометрические уравнения могут ждать меня на экзамене, я проанализировал контрольно-измерительные материалы последних трёх лет. Среди предлагавшихся в этот период уравнений были уравнения, которые сводились к алгебраическим. Например,

$$2\cos^3 x+\sqrt{3}\cos^2 x+2\cos x+\sqrt{3}=0,$$

$$2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x+-1=0,$$

$$2\sin^2 x+3\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+2=0,$$

$$\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1,$$

$$\frac{\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}=4\cos^2\frac{x}{2}.$$

Разберём решение предпоследнего уравнения.

Пример. $\sin x+2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\sin 2x+1$

Решение. Несмотря на то, что в уравнении присутствует только одна тригонометрическая функция, аргументы здесь разные. Преобразуем данное уравнение, применив формулу синуса суммы в левой части и формулу двойного угла в правой. Получим

$$\sin x+2\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos 2x\right)=2\sqrt{3}\sin x\cos x+1.$$

В левой части подставим значения синуса и косинуса и раскроем скобки:

$$\sin x+\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+1.$$

Теперь применим в левой части формулу двойного угла для синуса и косинуса:

$$\sin x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+1.$$

Перенесём все слагаемые в левую часть и, используя основное тригонометрическое тождество, заменим квадрат косинуса разностью:

$$-2\sin^2 x+\sin x=0 \text{ или}$$

$$2\sin^2 x-\sin x=0.$$

Вынося общий множитель за скобку, получаем уравнение

$\sin x(2\sin x-1)=0$, которое распадается на два уравнения:

$$\sin x=0 \text{ или } 2\sin x-1=0.$$

Первое уравнение имеет корни $x = \pi n,\ n \in Z$. Корни второго уравнения можно записать в виде $x = \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{array}\right.$ $n \in Z$. Корнями исходного уравнения будут являться все найденные корни.

Стоит отметить, что кроме уравнений, содержащих только тригонометрические функции, встречались комбинированные уравнения, а именно:

$$\log_2(\sin 2x) + \log_{\frac{1}{2}}(-\sin x) = \frac{1}{2},$$

$$\log_3(-\cos x) + \log_{\frac{1}{3}}(-\sin x) = -\frac{1}{2},$$

$$2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0,$$

$$9^{\cos x} + 9^{-\cos x} = \frac{10}{3}.$$

Решим одно из данных уравнений.

Пример. $\log_3(-\cos x) + \log_{\frac{1}{3}}(-\sin x) = -\frac{1}{2}$

Решение. Так как в уравнение входят логарифмы, то подлогарифмические выражения должны быть положительными. Поэтому

$$\begin{cases} -\cos x > 0, \\ -\sin x > 0. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет решение $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, второе – $\pi + 2\pi n < x < 2\pi + 2\pi n$. Система же неравенств имеет решение

$$\pi + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n.$$

Преобразуем левую часть уравнения, воспользовавшись свойствами логарифмов. Получим уравнение

$$\log_3 \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{1}{2}.$$

Далее имеем

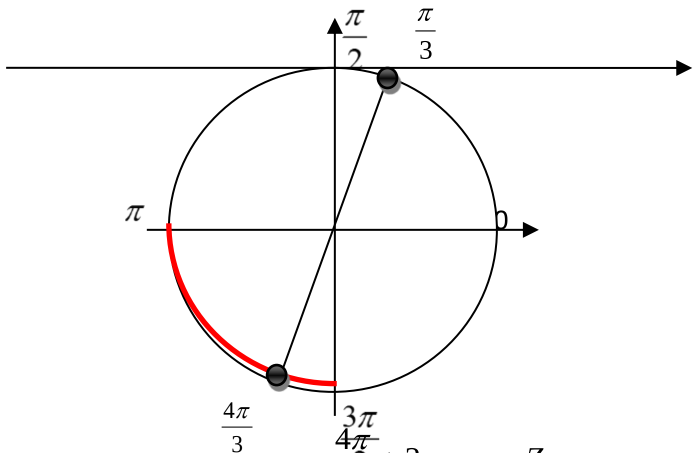
$$\log_3(ctgx) = \log_3 3^{-\frac{1}{2}},$$

$$ctgx = 3^{-\frac{1}{2}},$$

$$ctgx = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Корни данного уравнения имеют вид: $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

Так как уравнение имеет решение только при $\pi + 2\pi n < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$,то необходимо отобрать корни при помощи единичной окружности:



Решением исходного уравнения будет являться $x = \dfrac{4\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in Z$.

Также мне хотелось бы привести решение ещё одного тригонометрического уравнения, которое встретилось в одном из сборников по подготовке к ЕГЭ под редакцией И.В. Ященко.

Пример. $\sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

Решение. Преобразуем данное уравнение путём переноса в правую часть косинуса двойного угла, а в правой части вместо косинуса в знаменателе запишем его численное значение. Получим

$$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin^2 x + \cos 2x.$$

Далее используем формулу двойного угла для косинуса и основное тригонометрическое тождество:

$$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x;$$

$$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Полученное уравнение имеет решения только тогда, когда синус и косинус равны одновременно 1 или –1. В результате получаем совокупность двух систем уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \\ \sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \\ \sin\left(2x + \dfrac{2\pi}{3}\right) = -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x + \dfrac{\pi}{3} = 2\pi k \\ 2x + \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + \dfrac{\pi}{3} = \pi + 2\pi m \\ 2x + \dfrac{2\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi l \end{cases} \end{array}\right. , n, k, l, m \in Z \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}\\ x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi n\end{cases}\\ \begin{cases}x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi m}{2}\\ x=-\dfrac{7\pi}{12}+\pi l\end{cases}\end{array}\right.\quad n,k,l,m\in Z\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi n\\ \varnothing\end{array}\right.\quad n\in Z\Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi n,\ n\in Z$$

Конечно, охватить всё многообразие тригонометрических уравнений, которые предлагались на едином экзамене, а также предлагающихся в качестве тренировочных, в пределах одной работы достаточно сложно. Представленные здесь уравнения – лишь малая часть того, с чем мне пришлось поработать. По результатам своей работы я могу сделать вывод, что изложенных в первой главе способов решения тригонометрических уравнений достаточно для того, чтобы справиться с уравнением на экзамене. Чаще всего мне приходилось использовать метод замены переменной и сведение тригонометрического уравнения к алгебраическому, а также метод разложения на множители. Среди тренировочных упражнений на портале «Решу ЕГЭ» мне встретились однородные тригонометрические уравнения. Однако число их не столь велико.

Таким образом, для успешного выполнения задания №13 на едином экзамене необходимо не только овладеть основными методами решения тригонометрических уравнений, но и постоянно практиковаться в их решении. На сегодняшний день имеется большое количество информации по данному вопросу: теоретический материал, огромная база тригонометрических уравнений, а также видеоматериалы. Нужно лишь не лениться, и тогда всё обязательно получится.

Заключение

Работая над данным проектом, я убедился в том, раздел «Тригонометрия», действительно, сложный. Неудивительно, что к решению тригонометрического уравнения на экзамене приступают обучающиеся с хорошим уровнем подготовки.

Решая поставленные перед собой задачи на пути к достижению цели, я обращался к различным источникам знаний: учебникам, задачникам, методическим пособиям и рекомендациям. Львиную долю информации черпал из Интернет-ресурсов. Начиная с решения простейших тригонометрических уравнений, я постепенно пополнял багаж своих знаний в этой области. Данный проект позволил мне их систематизировать и обобщить.

Работу в заданном направлении можно продолжить. Задание №13 в ЕГЭ по математике состоит из двух частей: нужно решить предложенное уравнение, а затем произвести отбор корней, принадлежащих заданному промежутку. И именно процесс отбора корней представляет интерес. Но это будет уже темой моих дальнейших исследований.

На данном же этапе я с уверенностью могу сказать, что достиг поставленной перед собой цели. Мной был решён не один десяток тригонометрических уравнений, и теперь они не кажутся мне неприступной крепостью. Я думаю, что на экзамене мне вполне по силам будет справиться с тригонометрическим уравнением.

Список литературы

1. Глейзер Г.И. История математики в школе VII–VIII кл. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1982. – 240 с.
2. ЕГЭ 2020. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И.В. Ященко. – М.: Экзамен, МЦНМО, 2020. – 231 с.
3. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2019. – 256 с.
4. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов / под ред. И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2018. – 256 с.
5. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. Для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. – М.: Просвещение, 2021. – 384 с.
6. Корянов А.Г., Прокофьев А.А. Математика. ЕГЭ 2019. Профильный уровень. Тригонометрические уравнения: методы решений и отбор корней. Типовые задания №13. – (https://down.ctege.info/ege/obshee/matem/teoriya/matem-zadanie13teoriya+praktika.pdf)
7. Образовательный портал для подготовки к экзаменам https://ege.sdamgia.ru/
8. Сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ по математике https://alexlarin.net/
9. Сайт Федерального института педагогических измерений https://fipi.ru/
10. Сайт по подготовке к ЕГЭ и ОГЭ по математике https://math100.ru/
11. Свободная энциклопедия Википедия https://ru.wikipedia.org

Рецензия на проектную работу ученика 11а класса МБОУ СОШ р.п. Шемышейка Топорина Богдана

Работа Топорина Богдана «Тригонометрические уравнения в заданиях ЕГЭ» посвящена исследованию и решению тригонометрических уравнений, которые встречаются в контрольно-измерительных материалах единого государственного экзамена по математике профильного уровня. По мнению автора, эта тема является актуальной и полезной, так как многие выпускники школы сдают профильный экзамен по математике, и успешное решение данного задания поможет заработать баллы.

В ходе работы над проектом Богдан, опережая школьную программу, занялся изучением тригонометрических уравнений, рассмотрел их классификацию и основные способы решения. Затем был проведён анализ тригонометрических уравнений из КИМ разных лет. Изучаемые уравнения были классифицированы и решены.

Данный проект представляет собой серьёзную работу. Исследуя тригонометрические уравнения, Богдан приобрёл большой опыт в их решении, которым затем делился с одноклассниками на уроках математики. Также, работая над проектом, автор пришёл к выводу, что в большинстве случаев школьных знаний по тригонометрическим уравнениям бывает достаточно для их решения на экзамене.

Автором проекта продемонстрирован повышенный интерес к данному вопросу, а также способность приобретать новые знания и применять их в учебной деятельности. Поставленная Богданом цель в ходе работы над проектом была достигнута.

Руководитель проекта Тарасов Е.А.

27.12.2021 г